Adaptive networkの共発展ダイナミクスの母関数法解析 (集団ダイナミクスに現れる時空間パターンの数理)

青木, 高明

数理解析研究所講究録
第2063巻 2018年 7-14

Adaptive network の共発展ダイナミクスの母関数法解析

香川大学・教育学部 * 青木 高明
Takaaki Aoki
Faculty of Education, Kagawa University

概要

近年，現実のネットワークに共通する統計的性質を経験則として抽出し，その発生原理を説明する数理モデルの研究が進められている．Adaptive network models はその数理モデルの一つとして，神経網や道路網などに見られる動的素子と結合の共発展ダイナミクスに基づき統計的経験則を再現する．ただし問題点も有り，エージェントベースモデルとして記述されるため，一般に理論解析が難しい．本稿では既発表論文 [2] の概説として，Email や SNS などのコミュニケーションデータが持つ時間的・構造的経験則を再現したモデルを紹介し，その共発展ダイナミクスを母関数法により解析できることを概説する．

1 Introduction

人間関係や電力網，道路網や神経網などのシステムの結合関係 (ネットワーク) に注目し，それら多岐にわたるネットワークに共通する統計的性質をデータ解析から経験則として発見する試みが為されている [6]．近年，分析可能なデータが質と量ともに増加している．例えば，Email や SNS，携帯電話通話などのコミュニケーションデータにおいては，「誰と誰が会話・通信していたか」といった人間関係のみならず，「何時メッセージを送ったか」という時間情報を含んだイベント時系列データが分析されている．その結果ネットワークの静的構造だけでなく，その時間的変化やイベント時系列の統計的性質にも個別事例に依らず共通する統計的性質が発見されている [3, 10].

また実データ分析だけでは無く，経験則の発生原理を説明するため数理モデル研究も進められている．Adaptive network models はその数理モデルアプローチの一

* 〒760-8521 香川県高松市幸町 1-1

つである [4]. 通常ネットワークは，vertex と edge からなる graph として表現され，その構造は時間的に一定と仮定されることが多い．しかし人間関係や神経網などネットワークシステムではその構造は時々刻々と変化している．さらに vertex も単なる接合点ではなく動的素子であり，他の素子と edge を介して影響を与え合っている．その結果，動的素子による集団ダイナミクスは edge による隣接関係に強く依存している一方で，edge の時間的変化もまた集団ダイナミクスの振る舞いに依存している．Adaptive network models は動的素子とその結合関係の共発展ダイナミクスを数理モデル化する事で，実データに見られる統計的経験則を再現することを目指している．

Adaptive network models はシンプルなルールでも多様な現象を再現できる．しかし動的素子とその結合関係の共発展ダイナミクスはそもそもが複雑系であり，確率的エージェントベースモデルとして記述されることも多いため，一般に理論解析が難しく数値シミュレーションに頼る研究も多い．

本稿では既発表論文の概説 [2] として，ある adaptive network model を紹介し、その共発展ダイナミクスを母関数法により解析できることを概説する．2 章ではそのモデルが再現対象とする，ネットワークの時間的・構造的経験則について説明する．3 章ではモデルを記述し，4 章では母関数法による解析を説明する．

2　コミュニケーションデータが持つ時間的・構造的経験則

Email や SNS，携帯電話通話などのコミュニケーションデータをネットワークとして分析することで，人間集団の社会関係を可視化し，その構造的特性を明らかにする試みが為されてきた [6]．その結果，素子のリンク数 (次数) 分布が一般に冪分布に従うことが知られており (スケールフリー構造)，感染症対策や情報拡散などに重要な影響を与えている [1, 5]．

また近年はデータの質と量ともに増加しており，特に「何時コミュニケーションをしたか」というイベント時間情報を含んだ時系列データが研究対象になっている．その結果，人のコミュニケーション行動パターンとして，イベント時間間隔の統計的性質には非ポアソン性 (バースト性) が存在することが実証されている [3, 10]．

従来研究において，コミュニケーションデータの 2 つの経験的法則 (スケールフリー構造とバースト性) は，別々の発生原理から説明が為されてきた．しかし本来はコミュニケーションデータの 2 側面であり，同一の発生原理から説明されるべきである．その為，時間的・構造的経験則を総合的に再現する数理モデル (Adaptive temporal network model) を 3 章にて説明する．

3 An adaptive temporal network model

本章では，原論文 [2] で提案された数理モデルを説明する．

このモデルでは SNS や Web forum などのオンラインコミュニケーションを念頭に，参加者がメッセージを投稿しそれに返信していくことで，コミュニケーション活動が生じる状況を模している．まず N 人の agent 集団を考える ($i = 1, 2, \cdots, N$)．システムの時間発展は，以下の 3step からなる．

(i) Activation of nodes
(ii) Formation of pairs
(iii) Exchange of resources

Activation step(i) では N_A 人が active に，のこりは inactive にセットする．Agent は内部状態 $x_i(t)$ を持つ．ここで $x_i(t)$ は Agent が他者に対してコンタクトを取る意欲を抽象化した Resource として解釈し，内部状態 $x_i(t)$ に比例した確率で Active agent を選択する．

Pair formation step(ii) では，Active agent がコンタクトを取る相手を選択する．確率 κ で，相手は Agent 集団全体からランダムにピックアップされる [7]．これは SNS や Web-Forum に新規投稿したり，どこかの Thread にコメントすることを模している．また確率 $1-\kappa$ で相手は Active agent からランダムにピックアップされる [8]．これは既に投稿されたコメントに対して返答する状況を模している．

Active agent はコンタクトの結果として，directed edge を一時的に作る．Exchange step (iii) では，その edge を介して resource が移動する．

$$x_i(t+1) - x_i(t) = D\left[\sum_j a_{ij}(t) - \sum_j a_{ji}(t)\right], \tag{1}$$

ここで D は Resource の移動量である．Active agent はコンタクトを取ったことで満足しその意欲が減少する一方，コンタクトを受け取った相手は，逆に意欲が増加する．最終的に Resource の移動後は edge を破棄する．

以上を 1 時刻での時間発展として，それを繰り返す．初期状態として内部状態 $x_i(0) = 1$ として均一化された状態からスタートしても，系のパラメータ κ に応じて，質的に異なる振る舞いを示し，コミュニケーションデータの 2 つの経験的法則 (スケールフリー構造とバースト性) を再現することが可能である (数値計算結果の詳細については原論文を参照のこと)．

4 母関数法による解析

上記のエージェントベースモデルを解析するため，対応するマスター方程式を考える．Resource が離散状態のみをとることから，N, N_A が十分に大きな極限において状態密度 $u_n(t)$ を $x_i(t) = nD$ である Agent 数密度で定義する．その状態密

度 $u_n(t)$ の時間発展は，二項分布 $B(m,\rho,M)$ を用いて以下のように書くことができる．

$$\frac{du_n(t)}{dt} = A(-1)a_{n+1}u_{n+1}(t) - C_1 a_n u_n(t) - C_2\bar{a}_n u_n(t) + \sum_{m=1}^{N_A} a_{n-m}u_{n-m}(t)A(m) + \sum_{m=1}^{N_A\kappa} \bar{a}_{n-m}u_{n-m}(t)B_1(m).$$

ここで $a_n = \frac{N_A}{N}Dn$, $\bar{a}_n = 1 - a_n$, $B_1(m) = B(m,\rho_1,M_1)$, $B_2(m) = B(m,\rho_2,M_2)$, $A(m) = \sum_{m_1+m_2=m+1} B_1(m_1)B(m_2)$, and $C_1 = 1 - A(0)$, $C_2 = 1 - B_1(0)$ である．

このマスター方程式を解くため，母関数として $Q(t,x) = \sum_n u_n(t)x^n$ を取る．マスター方程式に x^n をかけ，$n \geq 0$ にて足し合わせてることで，母関数に関する方程式を得る事が出来る．

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \eta\frac{\partial Q}{\partial x}\left[A(-1) + (-C_1 + C_2)x + \sum_{m=1}^{N_A-1} A(m)x^{m+1} - \sum_{m=1}^{N_A\kappa} B(m,\rho_1,M_1)x^{m+1}\right] + Q\left[-C_2 + \sum_{m=1}^{N_A\kappa} B(m,\rho_1,M_1)x^m\right]. \tag{2}$$

ここで $\eta = \frac{N_A D}{N}$ である．上記の方程式を導くにあたって以下の関係式を用いた．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t} &= \sum_{n\geq 0} \frac{du_n(t)}{dt} x^n \\
\sum_{n\geq 0} a_n u_n(t) x^n &= \eta \sum_{n\geq 0} n u_n(t) x^n = \eta x \frac{\partial Q}{\partial x} \\
\sum_{n\geq 0} a_{n+1} u_{n+1}(t) x^n &= \eta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_{n+1}(t) x^n \\
&= \eta \left[\sum_{n=1}^{\infty} n u_n(t) x^{n-1} - (n u_n(t) x^n)|_{n=0} \right] \\
&= \eta \frac{\partial Q}{\partial x} \\
\sum_{n\geq 0} a_{n-m} u_{n-m}(t) x^n &= \eta \sum_{n=0}^{\infty} (n-m) u_{n-m}(t) x^n \\
&= \eta \sum_{n=0}^{\infty} (n-m) u_{n-m}(t) x^{n-m-1} \cdot x^{m+1} \\
&= \eta x^{m+1} \frac{\partial Q}{\partial x} \\
\sum_{n\geq 0} \bar{a}_n u_n(t) x^n &= \sum_{n\geq 0} (1 - \eta n) u_n(t) x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} u_n(t) x^n - \eta \sum_{n\geq 0} n u_n(t) x^n \\
&= Q - \eta x \frac{\partial Q}{\partial x} \\
\sum_{n\geq 0} \bar{a}_{n-m} u_{n-m}(t) x^n &= \sum_{n\geq 0} (1 - \eta(n-m)) u_{n-m}(t) x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} u_{n-m}(t) x^n - \eta \sum_{n\geq 0} (n-m) u_{n-m}(t) x^n \\
&= x^m \sum_{n\geq 0} u_{n-m}(t) x^{n-m} - \eta x^{m+1} \sum_{n\geq 0} (n-m) u_{n-m}(t) x^{n-m-1} \\
&= x^m Q - \eta x^{m+1} \frac{\partial Q}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Agent 数 N，Active agent 数 N_A が比率 N_A/N を一定に保ちつつ，共に $+\infty$ の極限を考える．このとき二項分布をポアソン分布で近似する事が出来るため，方程

式 (2) の各項は以下のように単純化できる.

$$\sum_{m=1}^{N_A\kappa} B_1(m)x^m \sim \sum_{m=1}^{N_A\kappa} \frac{(\lambda_1 x)^m e^{-\lambda_1}}{m!} \to e^{-\lambda_1}[-1+e^{\lambda_1 x}] \quad (N_A \to \infty)$$

$$\sum_{m=1}^{N_A\kappa} B_1(m)x^{m+1} \to xe^{-\lambda_1}[-1+e^{\lambda_1 x}]$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 - \sum_{m_1+m_2=1} B_1(m_1)B_2(m_2) = 1 - [B_1(0)B_2(1) + B_1(1)B_2(0)] \\
&\sim 1 - [\lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} + e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2}] = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2) \\
C_2 &= 1 - B_1(0) \sim 1 - e^{-\lambda_1} \\
A(-1) &= B_1(0)B_2(0) \sim e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N_A-1} A(m)x^{m+1} &= \sum_{m=1}^{N_A-1} \sum_{m_1+m_2=m} B_1(m_1)B_2(m_2)x^{m+1} \\
&= \sum_{s=2}^{N_A}\sum_{r=0}^{s} B_1(s)B_2(s-r)x^s \\
&= \sum_{s=0}^{N_A}\sum_{r=0}^{s} B_1(s)B_2(s-r)x^s - B_1(0)B_2(0) - [B_1(0)B_2(1) + B_1(1)B_2(0)]x \\
&\to \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_1(n)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_2(n)x^n\right) \\
&- B_1(0)B_2(0) - [B_1(0)B_2(1) + B_1(1)B_2(0)]x \quad (N_A \to \infty) \\
&= \exp\left[(\lambda_1+\lambda_2)(x-1)\right] - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left[1 + (\lambda_1+\lambda_2)x\right].
\end{aligned}$$

ここで $\lambda_1 = \frac{N_A}{N}\kappa$, $\lambda_2 = 1-\kappa$. また以下の母関数の恒等式を用いた [11]:

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} x^n = f \cdot g, \quad f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, g = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

以上の結果、以下の単純化された方程式を得る事が出来る.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t} &= \eta Y(x)\frac{\partial Q}{\partial x} + Z(x)Q, \qquad (3) \\
Y(x) &= \exp\left((\lambda_1+\lambda_2)(x-1)\right) - x\exp\left(\lambda_1(x-1)\right), \\
Z(x) &= -1 + \exp\left(\lambda_1(x-1)\right).
\end{aligned}$$

定常状態 $\frac{\partial Q}{\partial t} \to 0$ にて, $Q'(1) \equiv \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=1}$ および $Q''(1) = \left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right|_{x=1}$ を求める.
式 (3) により

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = -\frac{Z(x)}{\eta Y(x)}.$$

$\lim_{x\to 1} Y(x) = \lim_{x\to 1} Z(x) = 0$ であるため,

$$\frac{Q'(1)}{Q(1)} = -\lim_{x\to 1}\frac{Z'(x)}{\eta Y'(x)}.$$

規格化条件 $Q(1) = 1$ より，以下を得る．

$$Q'(1) = -\frac{Z'(1)}{\eta Y'(1)} = -\frac{N_A}{N}\kappa\cdot\frac{1}{\frac{N_A}{N}D\cdot(-\kappa)} = 1/D.$$

同様に $Q''(1)$ についても

$$Q''(1) = \frac{1}{2D\kappa}\left[1-2\kappa+\left(1-\frac{N_A}{N}\right)\kappa^2\right]+\frac{1}{D^2}.$$

$Q'(1)$ and $Q''(1)$ を用いて，最終的に定常密度分布 u_n^* の平均 μ と分散 σ^2 を得る [11].

$$\mu = Q'(1) = \frac{1}{D}$$
$$\sigma^2 = Q''(1) + Q'(1) - Q'(1)^2 = \frac{1}{2D\kappa}\left[1-2\kappa+\left(1-\frac{N_A}{N}\right)\kappa^2\right]+\frac{1}{D}.$$

Resource x の分布の平均 μ_x と分散 σ_x^2 については，$x = nD$ により求める．

$$\mu_x = 1 \tag{4}$$
$$\sigma_x^2 = \frac{D}{2\kappa}\left[1-2\kappa+\left(1-\frac{N_A}{N}\right)\kappa^2\right]+D. \tag{5}$$

この結果より $\kappa\to 0$ の極限で，分散が発散することが分かる．実際にエージェントベースモデルの数値計算の結果を見ても $\kappa\sim 0$ にて分布が冪則に従うことが確認できる．

5 まとめ

母関数法や近似計算を用いることで，多数の Agent からなる数理モデルを最終的には方程式 (3) のような簡素化された 1 変数偏微分方程式に縮約することができる．同様の手法は，別の Adaptive network model に対しても適用されており，モデルによっては少数自由度の常微分方程式に縮約できるケースもある [9]. Adaptive network model の解析手法として有効な手法であり，今後の活用が期待される．

参考文献

[1] R. Albert and A. Barabasi, *Statistical mechanics of complex networks*, Rev. Mod. Phys., 74 (2002), pp. 47–97.

[2] T. Aoki, L. E. C. Rocha, and T. Gross, *Temporal and structural heterogeneities emerging in adaptive temporal networks*, Phys. Rev. E, 93 (2016), p. 040301.

[3] A.-L. Barabasi, *The origin of bursts and heavy tails in human dynamics*, Nature, 435 (2005), pp. 207–211.

[4] T. Gross and B. Blasius, *Adaptive coevolutionary networks: a review.*, J. R. Soc. Interface, 5 (2008), pp. 259–271.

[5] M. Newman, *The structure and function of complex networks*, SIAM Review, 45 (2003), pp. 167–256.

[6] M. Newman, *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 2010.

[7] N. Perra, B. Gonçalves, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, *Activity driven modeling of time varying networks.*, Sci. Rep., 2 (2012), p. 469.

[8] L. E. C. Rocha, F. Liljeros, and P. Holme, *Simulated Epidemics in an Empirical Spatiotemporal Network of 50,185 Sexual Contacts*, PLoS Comput. Biol., 7 (2011), p. e1001109.

[9] H. Silk, G. Demirel, M. Homer, and T. Gross, *Exploring the adaptive voter model dynamics with a mathematical triple jump*, New Journal of Physics, 16 (2014), p. 093051.

[10] A. Vázquez, J. G. Oliveira, Z. Dezsö, K.-I. Goh, I. Kondor, and A.-L. Barabási, *Modeling bursts and heavy tails in human dynamics*, Phys. Rev. E, 73 (2006), p. 036127.

[11] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2006.